



# LVIII Olimpiada Matematyczna

## Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2007 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  punkt  $O$  jest środkiem okręgu opisanego, odcinek  $CD$  jest wysokością, punkt  $E$  leży na boku  $AB$ , a punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $CE$ . Prosta prostopadła do prostej  $OM$  i przechodząca przez punkt  $M$  przecina proste  $AC$ ,  $BC$  odpowiednio w punktach  $K$ ,  $L$ . Dowieść, że

$$\frac{LM}{MK} = \frac{AD}{DB}.$$

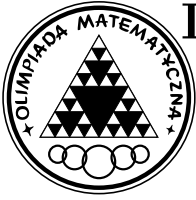
2. Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *białą*, jeżeli jest równa 1 lub jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Pozostałe liczby całkowite dodatnie nazwiemy *czarnymi*.

Zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia, że suma jej białych dzielników jest równa sumie jej czarnych dzielników.

3. Płaszczyznę podzielono prostymi poziomymi i pionowymi na kwadraty jednostkowe. W każdy kwadrat należy wpisać liczbę całkowitą dodatnią tak, by każda liczba całkowita dodatnia wystąpiła na płaszczyźnie dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić w taki sposób, aby każda napisana liczba była dzielnikiem sumy liczb wpisanych w cztery kwadraty sąsiednie.

### Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



# LVIII Olimpiada Matematyczna

## Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

19 kwietnia 2007 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest liczba całkowita  $n \geq 1$ . Wyznaczyć liczbę możliwych wartości iloczynu  $k \cdot m$ , gdzie  $k, m$  są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności

$$n^2 \leq k \leq m \leq (n+1)^2.$$

5. W czworóścianie  $ABCD$  spełnione są zależności

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD,$$

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC.$$

Udowodnić, że środek sfery opisanej na tym czworóścianie leży na prostej przechodzącej przez środki krawędzi  $AB$  i  $CD$ .

6. Ciąg  $a_0, a_1, a_2, \dots$  jest określony przez warunki:  $a_0 = -1$  oraz

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_1}{n} + \frac{a_0}{n+1} = 0 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wykazać, że  $a_n > 0$  dla  $n \geq 1$ .

### Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.